Ciências Exatas e da Terra, Matemática.

TERNAS PITAGÓRICAS.

Ritchard Matheus S. Souza[1], Allan Edley R. de Andrade[2]
1. Estudante da Faculdade de Licenciatura Matematica da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)
2. Professor da UFMS - Professor Dr. /Orientador

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma caracterização das chamadas ternas pitagóricas, as quais são ternas (a, b, c) de números inteiros positivos satisfazendo $a^2 + b^2 = c^2$. Abordamos também o conceito de ternas pitagóricas primitivas, como descobrir o número de triângulos pitagóricos que possuem como cateto um valor fixado n par e por fim como utilizar os conceitos de ternas pitagóricas para construir com régua e compasso os números da forma $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$.

Palavras-chave: Geometria, Pitágoras, Triângulo Retângulo.

Apoio financeiro: PET

Introdução

O teorema de Pitagoras é um dos mais antigos e famosos da matemática e afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, onde a, b, c são respectivamente os comprimentos de dois catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Ao longo dos séculos houve diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, no entanto não se sabe qual foi a demonstração original utilizada por Pitágoras, mas historiadores acreditam que deve ter sido alguma usando área. Há indícios que antes de Pitágoras os babilônicos antigos já conheciam o Teorema de Pitágoras, vários tabletes de barro datados no período de 1800 a.C à 1600 a.C. foram encontrados e decifrados. Um deles, nomeado Plimpton 322 continha um fragmento de uma tabela, na qual os pesquisadores descobriram ser listas de ternas de números inteiros (a, b, c) satistazendo a relação $a^2 + b^2 = c^2$(denominadas ternas pitagóricas).

Em seus estudos Pitágoras observou que existem infinitas ternas pitagóricas, a saber: (5,12,13), (7,24,25), (9,40,41), as quais são ternas da forma $(a, b, b + 1)$ chamadas de ternas pitagóricas clássica de primeiro tipo. Por outro lado, Platão observou que no caso que a diferença de um cateto e a hipotenusa for dois, é possível obter ternas pitagóricas da forma $(a, b, b + 2)$, as quais são conhecidas como ternas pitagóricas clássicas de segundo tipo.

Neste trabalho abordaremos uma caracterização de todas as ternas pitagóricas e como utilizar esta teoria para contar todos os triângulos retângulos com um dos catetos sendo um número par fixado. Além disso, mostraremos como utilizar os conceitos de ternas pitagóricas para propor um método prático de construção da raiz n-ésima, $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$, usando régua e compasso.

Metodologia

O trabalho é resultado de pesquisa teórica e prática desenvolvida no âmbito do Programa de Educação Tutorial (PET), realizado por meio de leitura, discussão de artigos e apresentação de seminários. Nos estudos foram abordados tanto a parte histórica de Pitágoras, parte analítica que corresponde a caracterização das ternas pitagóricas e parte geométrica que envolve uma aplicação da teoria na construção com régua e compasso.

Resultados e Discussão

Definição 3.1. A terna (a, b, c) chama-se ternas pitagóricas, se e somente se, a, b e c forem inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Dizemos que a terna é primitiva quando a, b e c são primos entre si.

A denominação "pitagórica" talvez não seja muito apropriada, pois há evidência de que os babilônios que viveram há mais de 1000 anos antes de Pitágoras conheciam um maior número de ternas pitagóricas do que seus sucessores gregos. Em todo caso, os pitagóricos sabiam que qualquer terna da forma $\left(m, \frac{1}{2}(m^2 - 1), \frac{1}{2}(m^2 + 1)\right)$ onde m é um inteiro ímpar maior que 1 é um terna pitagórica conhecida como ternas pitagóricas clássica de primeiro tipo. Observe que nem todas as ternas pitagóricas podem ser obtidos dessa forma (por exemplo a terna (15, 8,17)), sendo assim, será que existe alguma forma que gere todas as ternas pitagóricas? Esta pergunta é respondida pelo seguinte teorema:

Teorema 3.2. (a, b, c) é um terna pitagórica, se e somente se, existirem inteiros positivos u e v, $u > v$, de igual paridade, tais que $u.v$ seja um quadrado perfeito e $(a, b, c) = \left(\sqrt{u.v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$.

Demonstração: Suponhamos que (a, b, c) seja uma terna pitagórica. Então, $a^2 + b^2 = c^2$ de modo que $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$.

Tomando $u = (c + b)$ e $v = (c - b)$ temos que $u.v$ é um quadrado perfeito. Além disso, u e v são inteiros de mesma paridade (pois b e c são inteiros positivos e $c > b$), $u > v$ (pois $c + b > c - b$).

De $u = (c+b)$ e $v = (c-b)$ tirando os valores de c e b em função de u e v, temos $b = \frac{u-v}{2}$ e $c = \frac{u+v}{2}$. Também $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = u.v$ de modo que $a = \sqrt{u.v}$.

Reciprocamente, suponhamos que u e v sejam inteiros positivos de mesma paridade, $u > v$ e que $u.v$ seja um quadrado perfeito. Fazendo $a = \sqrt{u.v}$, $b = \frac{u-v}{2}$, $c = \frac{u+v}{2}$ temos:

- a é um inteiro positivo pois $u.v$ é um quadrado perfeito.
- b e c são inteiros positivos pois $u - v$ e $u + v$ são ambos pares (lembre-se que u e v tem a mesma paridade e $u > v$).
- $a^2 + b^2 = \left(\sqrt{u.v}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = c^2$.

Observação 3.3. Se u e v forem primos entre si então o $\left(\sqrt{u.v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$ gerador por eles é primitivo, pois todo fator comum de $\frac{u-v}{2}$ e $\frac{u+v}{2}$ é também fator comum de u e v. De fato: Se p é um divisor de $\frac{u-v}{2}$ e $\frac{u+v}{2}$, então:

$$\begin{cases} b = \dfrac{u-v}{2} = p.k_1\,, & k_1 \in \mathbb{Z} \\ c = \dfrac{u+v}{2} = p.k_2\,, & k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Mas $u = (c+b)$ e $v = (c-b)$ assim,

$$\begin{cases} u = \dfrac{u+v}{2} + \dfrac{u-v}{2} = p.(k_1 + k_2) \\ v = \left(\dfrac{u+v}{2}\right) - \left(\dfrac{u-v}{2}\right) = p.(k_2 - k_2) \end{cases}$$

com $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ e $k_2 - k_2 \in \mathbb{Z}$, ou seja p é divisor de u e v.

Agora iremos aplicar a teoria desenvolvida acima para resolver alguns problemas de construção com régua e compasso.

Problema 1: Usando régua e compasso, construa um segmento de comprimento $\sqrt{24}$.

Solução: Como $\sqrt{24} = u.v$, então $2^3.3 = 24 = u.v$, assim a priori as possivilidades de decomposição são

- $2; 2^2.3$
- $2^2; 2.3$
- $2^2; 3$
- $2^2.3; 1$

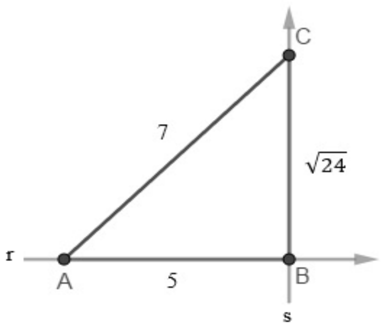
No entanto devemos escolher os pares u, v de mesma paridade com $u > v$, restando somente as possibilidades

- i) $u = 6$ e $v = 4$ ii) $u = 12$ e $v = 2$.

Utilizando a teoria sobre ternas pitagóricas desenvolvida acima, podemos calcular os valores de $b = \frac{u-v}{2}$ e $c = \frac{u+v}{2}$, obtendo os valores i) $b = 1$ e $c = 5$ ou ii) $b = 5$ e $c = 7$.

Assim, temos duas possibilidades de construir um triângulo de lado $\sqrt{24}$. Utilizaremos a possibilidade ii) Para construirmos com régua e compasso o triângulo desejado.

Comece desenhando duas retas perpendiculares r e s. Chame de B o ponto de intersecção. Escolha uma unidade de comprimento. Em r marque um segmento BA de comprimento b, neste caso, de comprimento 5. Com a ponta do compasso em A e abertura c, neste caso 7, desenhe um arco e chame de C um dos pontos onde o arco intercepta s. Sendo ABC um triângulo retângulo, $AB = 5$ e $AC = 7$, segue-se que $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 49 - 25 - 24$.



Analogamente podemos construir um triângulo com a possibilidade i).

Agora apresentaremos um teorema que determina a partir da decomposição em primos de um número natural par $M \in \mathbb{N}$, quantos triângulos retângulos possuem M como cateto.

Teorema 3.4. Se M é um número natural par com $M = 2^{\propto}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k}$, então existem

$$\frac{(2\alpha\ -\ 1).(2l_1\ +\ 1).(2l_2\ +\ 1).(2l_3\ +\ 1)\ldots(2l_{k-1}\ +\ 1).(2l_k + 1)\ -\ 1}{2}$$

triângulos pitagóricos com M sendo um dos catetos.

Demonstração: Sendo M um número par e usando o teorema 3.2, temos:

$$M\ =\ 2^{\propto}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k}\ =\ \sqrt{u.v}\quad \Rightarrow\quad 2^{\propto}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k}\ =\ \sqrt{u.v}$$
$$\Rightarrow\ (2^{\propto}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k}\ )^2 = (\sqrt{u.v})^2$$
$$\Rightarrow 2^{2\propto}.p_1^{2l_1}.p_2^{2l_2}.p_3^{2l_3}\ldots p_k^{2l_k}\ =\ u.v.$$

Assim, nota-se que $u.v$ são formados pelos fatores de primos de M.

Logo devemos ter $p_k^i \in u$ ou/e $p_k^i \in v$, pois u e v podem possuir fator comum. Porém u e v possuem mesma paridade, logo u e v são números pares dado que $M^2 = u.v$ é par.

Portanto os fatores p_k^i que aparecem em $2^{2\propto}.p_1^{2l_1}.p_2^{2l_2}.p_3^{2l_3}\ldots p_k^{2l_k}$ são distribuídos entre u e v, como indicado na tabela abaixo:

u	***v***
$2^{2\propto-1}\,p_k^{2l_k}$	$2^1p_k^0$
$2^{2\propto-2}\,p_k^{2l_k-1}$	$2^2p_k^1$
$2^{2\propto-3}\,p_k^{2l_k-2}$	$2^3p_k^2$
$\vdots$	$\vdots$
$2^3p_k^2$	$2^{2\propto-3}\,p_k^{2l_k-2}$
$2^2p_k^1$	$2^{2\propto-2}\,p_k^{2l_k-1}$
$2^1p_k^0$	$2^{2\propto-1}\,p_k^{2l_k}$

Logo podemos observar que cada fator primo p_k tem $2l_k + 1$ opções de aparecer em u e v, e o fator primo 2 tem $2\alpha - 1$ opções de aparecer em u e v.

Assim, para fazer a contagem de u e v, basta analisar a distribuição dos fatores primos e do fator 2. Sendo M, tal que M possui k fatores primos, a contagem da distribuição dos fatores primos, é dada por

$$(1)\ \ (2\alpha\ -\ 1).(2l_1\ +\ 1).(2l_2\ +\ 1).(2l_3\ +\ 1)\ldots(2l_{k-1}\ +\ 1).(2l_k + 1).$$

Porém em (1) devemos considerar apenas os casos que $u\ >\ v$. Retirando $u\ =\ v$ e $v\ >\ u$, temos exatamente

$$(2)\ \ \frac{(2\alpha - 1).(2l_1 + 1).(2l_2 + 1).(2l_3 + 1)\ldots(2l_{k-1} + 1).(2l_k + 1) - 1}{2}$$

Triângulos pitagóricos com $M = 2^{\propto}.p_1^{l_1}.p_2^{l_2}.p_3^{l_3}\ldots p_k^{l_k}$ sendo um dos catetos.

Problema 2: Quantos triângulos retânguos existem com um dos catetos medindo 12 cm? E medindo 60 cm?

Solução: Como $12 = 2^2.3$, então $\alpha = 2$ e $l_1 = 1$, assim temos $\frac{(2.2-1).(2.1+1)-1}{2} = 1$ triângulos pitagórico com cateto medindo 12 cm (a saber o triângulo com catetos medindo 12, 16 e hipotenusa medindo 20).

Agora para $60 = 2^2.3.5$, temos $\alpha = 2$ e $l_1 = 1$ e $l_2 = 1$, portanto existem exatamente

$$\frac{(2.1\ -\ 1).(2.1\ +\ 1).(2.1\ +\ 1) - 1}{2} = 4$$

Triângulos pitagóricos que possuem um dos catetos medindo 60 cm.

Conclusões

Ao abordar a temática Ternas pitagóricas foi possível estudar diferentes frentes da matemática, por exemplo, um pouco de teoria dos números, geometria plana e construção com régua e compasso. No estudo surgiram vários fatos interessantes entre eles que é possível encontrar o número de todos os triângulos retângulos que possuem um determinado cateto. Assim, no desenvolvimento deste trabalho foi possível abordar e relembrar tanto aspectos geométricos como algébricos contribuindo para minha formação acadêmica.

Referências bibliográficas

[1] BOYER, C. B. **História da Matemática** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[2] MOREIRA, C. G. T. A., **Tópicos de teoria dos números**, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] ROTHBART A.; PAUSSEL B. **Números Pitagóricos: uma fórmula de fácil dedução e algumas aplicações geométricas**, RPM 07-Números Pitagóricos.

[4] WAGNER E., **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de janeiro, IMPA, 2015.