Ciências Exatas da Terra, Matemática.

GENERALIZAÇÃO E EXTENSÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Carlos Henrique D. S. Filho[1*], Allan Edley Ramos de Andrade [2]
1. Estudante de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS-CPTL)
2. Professor Dr. da UFMS - CPTL - Departamento de Matemática/Orientador.

Resumo
O trabalho tem ênfase em estudar o Teorema de Pitágoras e sua generalização, assim como extender o teorema para uma versão envolvendo um triedro tri-retângulo.

Palavras-chave: Triângulo Retângulo, Geometria, Área.

Apoio financeiro: PET

Introdução

Pitágoras (569- 480 a.C) nasceu na ilha de Samos, próximo de Mileto, onde 50 anos antes havia nascido Tales. Foi a partir das ideias desses grandes estudiosos gregos que a Matemática se iniciou como ciência e assim pode se desenvolver enormemente nos séculos seguintes.

Pitágoras esteve em vários lugares diferentes adquirindo conhecimento matemático e religioso, como por exemplo, Egito e na Babilônia, e voltando ao mundo grego, iniciou em Crotona (sudeste da Itália) uma escola eficiente no estudo da matemática e filosofia.

Os documentos daquela época se perderam, assim os relatos que conhecemos são de autores que viveram em séculos seguintes, fazendo com que Pitágoras se tornasse uma figura um pouco obscura na história da Matemática. Além disso, a escola fundada por ele era comunitária, ou seja, todo conhecimento adquirido levava o nome de todos, e por isso, até hoje não se sabe verdadeiramente se realmente foi Pitágoras quem desenvolveu o teorema que leva seu nome, ou se foi algum de seus aprendizes.

Depois de séculos, ainda não conhecemos a demonstração original de Pitágoras, mas historiadores acreditam que a demonstração veio através do uso de áreas.

O Teorema de Pitágoras afirma que dado um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, isto é, se a hipotenusa tem lado a e os catetos b e c, então $a^2 = b^2 + c^2$. O teorema também pode ser enunciado da seguinte maneira: A área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Um fato curioso é que existem provas de que cerca de mil anos antes, os antigos babilônios já tinham conhecimento do Teorema de Pitágoras, pois foram encontrados vários tabletes de barro que foram decifrados e perceberam que neles continham ternas de números que satisfaziam a relação do Teorema de Pitágoras. Um desses tabletes é chamado de Plimptom 322 e está na Universidade de Columbia.

Outras civilizações que também detinham certo conhecimento sobre o teorema de Pitágoras é a civilação Egípcia, Hindu e Chinesa. Para Eves (2011, p. 86), os egípcios antigos já construíam triângulos com lados 3, 4 e 5, com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos. Na índia há vestígios matemáticos dos chamados sulbasutras do século VI a.C que continham regras geométricas para a construção de altares (mediante ao esticar de cordas) em que se revela certo conhecimento das ternas pitagóricas, Eves (2011, p.248). Além disso, na China, um admirável livro chamado Zhoubi Suanjing publicou 246 problemas bastante antigos e perceberam que um deles chamado Gou Gu, era equivalente ao Teorema de Pitágoras.

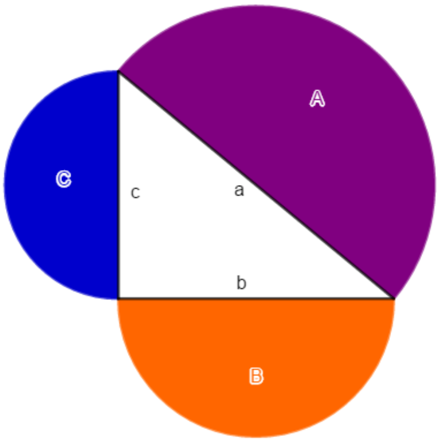
Metodologia

O presente trabalho faz parte da atividade de pesquisa em Matemática que é desenvolvida pelo grupo PET Conexões de Saberes Matemática da UFMS, Campus de Três Lagoas. O trabalho foi desenvolvido através de estudo teórico, seminários, pesquisas bibliográficas, demonstrações e aplicações do teorema na Geometria Plana.

Resultados e Discussão

Generalização do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pítagoras diz que a área do quadrado feito sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados das áreas feitas sobre os catetos. Consideremos agora ao invés de quadrados, figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.



Sejam A, B e C as áreas das figuras semelhantes feitas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo como ilustrado acima. Como a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre os lados correspondentes

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \quad ou \quad \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2} \quad ou \quad \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$$

obtendo as seguintes igualdades:

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Isolando a^2 e c^2 chegamos em

$$a^2 = \frac{A.b^2}{B}, \quad c^2 = \frac{C.b^2}{B}.$$

De onde segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{A.b^2}{B} = b^2 + \frac{C.b^2}{B} \Rightarrow A.b^2 = B.b^2 + B.\frac{C.b^2}{B} \Rightarrow$$

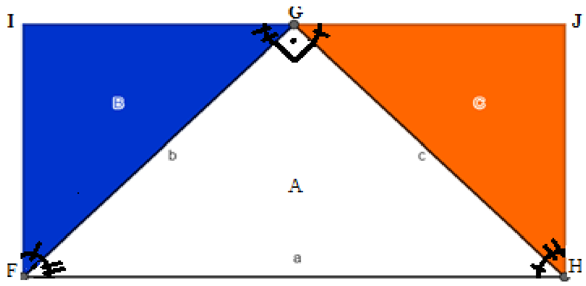
$$\Rightarrow \quad A.b^2 = B.b^2 + C.b^2 \;\Rightarrow\; A = B + C.$$

Portanto, $A = B + C$.

Teorema de Pitágoras

Mostraremos agora uma interessante demonstração do Teorema de Pítagoras utilizando o fato de que as áreas de figuras semelhantes são iguais aos quadrados da razão entre elementos correspondentes.

A imagem abaixo mostra um triângulo FGH retângulo em G de área A e um retângulo circunscrito tendo por base a hipotenusa do triângulo.



Os triângulos GIF e JGH sobre os catetos, têm áreas B e C, e são ambos semelhantes ao triângulo FGH. De fato,

$$J\hat{G}H = G\hat{H}F \quad \text{e} \quad I\hat{G}F = G\hat{F}H$$

pois são ângulos alternos internos. Além disso

$$I\hat{F}G = J\hat{G}H \quad \text{e} \quad I\hat{G}F = G\hat{H}J$$

pois

$$\begin{aligned} I\hat{F}G &= 90^\circ - I\hat{G}F = 90^\circ - G\hat{F}H = G\hat{H}F = J\hat{G}H \\ I\hat{G}F &= 90^\circ - I\hat{F}G = 90^\circ - J\hat{G}H = G\hat{H}J. \end{aligned}$$

Portanto, a razão entre as áreas dos triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão entre os lados correspondentes, ou seja, $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$.

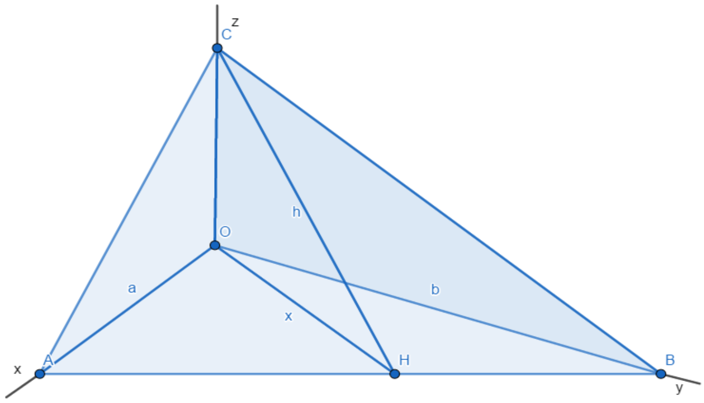
Mas a áreas A do triângulo maior é a metade da área do retângulo circunscrito. Logo, é igual à soma dos dois triângulos menores, ou seja, $A = B + C$.

Utilizando as igualdades $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$ e $A = B + C$, então

$$A = B + C \;\Rightarrow A.b^2 = B.b^2 + C.b^2 \Rightarrow A.b^2 = B.b^2 + B.\frac{C.b^2}{B} \;\Rightarrow \frac{A.b^2}{B} = b^2 + \frac{C.b^2}{B} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Extensão do Teorema de Pitágoras

Considere um triedro tri-retângulo de vértice O cortado por um plano formando o tetraedro $OABC$ com $OA = a$, $OB = b$ e $OC = c$ como mostra a imagem abaixo.



Sejam: área de $\mathrm{ABC} = \mathrm{S}$, área de $\mathrm{OAB} = \mathrm{S}_1$, área de $\mathrm{OBC} = \mathrm{S}_2$ e área de $\mathrm{OCA} = \mathrm{S}_3$.

Iremos demonstrar que o quadrado da área de ABC é igual à soma dos quadrados das áreas dos outros três triângulos.

No início, analisando a imagem, traçamos um plano que contém OZ e é perpendicular a AB. Esse plano cortou AB em H e, consequentemente, tanto OH quanto CH são perpendiculares a AB. Chamaremos $\mathrm{OH} = \mathrm{x}$ e $\mathrm{CH} = \mathrm{h}$.

Em seguida, lembrando que em um triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura a ela relativa, temos a seguinte relação no triângulo retângulo OAB, $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{x}$.

As áreas dos triângulos são

$$S = \frac{AB \cdot h}{2}, \qquad S_1 = \frac{a \cdot b}{2}, \qquad S_2 = \frac{b \cdot c}{2}, \qquad S_3 = \frac{a \cdot c}{2}.$$

Assim,

$$S = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{4} + \frac{b^2 \cdot c^2}{4} + \frac{a^2 \cdot c^2}{4} = \frac{1}{4}[AB^2 \cdot x^2 + c^2(a^2 + b^2)]$$

$$= \frac{1}{4}[AB^2 \cdot x^2 + AB^2 \cdot c^2] = \frac{AB^2}{4}(x^2 + c^2) = \frac{AB^2 \cdot h^2}{4} = S^2.$$

Portanto, $S^2 = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2$. Obtendo assim uma extensão do Teorema de Pítagoras.

Conclusões

Através do presente trabalho foi possível estudar alguns conceitos da matemática como semelhança de triângulos, propriedades algébricas envolvendo proporções, além de revisar alguns conceitos da geometria espacial. Assim, considero que este trabalho contribuiu para minha formação.

Referências bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.

[2] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp, São Paulo, 1997.

[3] LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO; Augusto C., **Temas e Problemas Elementares**, Coleção PROFMAT, SBM 2012.

[4] WAGNER E., **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de janeiro, IMPA, 2015.