1.01.03 – Matemática/ Geometria e Topologia

EXPLORANDO PROPRIEDADES MATEMÁTICAS DA ESTRELA DE DAVI

José Augusto da Costa Jacomeli[1]*, Fernando Pereira de Souza[2], Eugenia Brunilda Opazo Uribe[3]
1. Estudante do Curso de Matemática- Licenciatura (UFMS/CPTL)
2. Prof. Dr. do Curso de Matemática – Licenciatura (UFMS/CPTL)
3. Profª. Drª. do Curso de Matemática – Licenciatura (UFMS/CPTL)

Resumo

A Geometria é um ramo da Matemática muito antiga, pois segundo estudos de Brito e Carvalho (2005), os primeiros relatos do uso do teste tema da Matemática datam da época dos egípcios e supõe-se que a Geometria tinha o significado de “medir terras”, para então fazer a divisão delas. Este trabalho se baseia na demonstração e aplicação de um resultado da geometria Plana, chamado de Teorema de Napoleão. O Teorema diz que se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC forem construídos triângulos equiláteros, os ortocentros desses triângulos equiláteros formam igualmente um triângulo equilátero. Primeiro, aplicaremos o Teorema de Napoleão em um triângulo equilátero e mostraremos que o resultado obtido é a famosa Estrela de Davi, símbolo do Judaísmo e está presente na bandeira de Israel. Em seguida, abordaremos as propriedades Matemáticas da Estrela de Davi, tais como área e perímetro.

Palavras-chave: Geometria; Teorema de Napoleão; Ensino de Matemática.

Apoio financeiro: Programa de Educação Tutorial

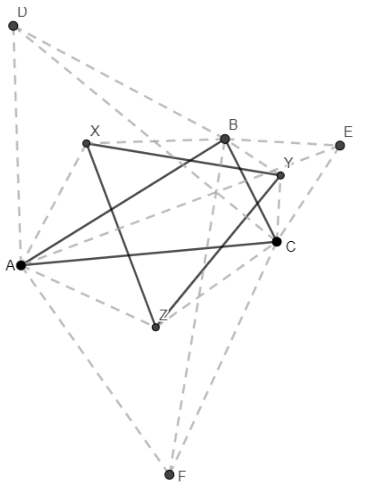
Introdução

Desde a sua descoberta há mais de 150 anos, o teorema de Napoleão fascinou os matemáticos, profissionais e amadores. Pelo menos 150 artigos foram publicados dando provas, generalizações, variantes e história do teorema. Neste trabalho, aplicaremos o Teorema de Napoleão em um triângulo equilátero e mostraremos que o triângulo obtido junto com o original forma a Estrela de Davi.

Primeiramente, vamos nos lembrar do Teorema de Napoleão:

Teorema de Napoleão: Seja um triângulo ΔABC qualquer, se em seus lados forem construídos triângulos equiláteros, os ortocentros desses triângulos formará um triângulo equilátero.

Figura 1: Teorema de Napoleão em um triângulo qualquer



Fonte: O autor

Se aplicarmos o Teorema de Napoleão em um triângulo equilátero, o resultado ainda continua sendo outro triângulo equilátero, nosso propósito é mostrar que os dois triângulos são congruentes e calcular sua área e perímetro.

Metodologia

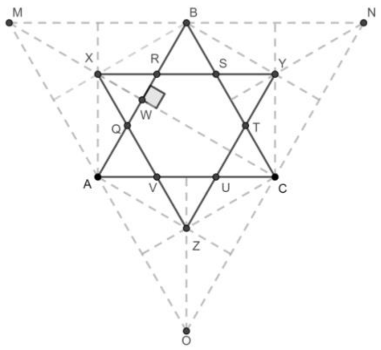
O trabalho faz parte de uma atividade de pesquisa do Programa de Educação Tutorial (PET) com o objetivo de aprofundar os conhecimentos em geometria. Foi desenvolvido através de seminários, discussões e aborda o Teorema de Napoleão e propriedades matemáticas encontradas na famosa Estrela de Davi. O primeiro passo foi entender o conceito do Teorema de Napoleão e sua demonstração. Através de análise e discussões observamos que ao aplicarmos o teorema em um triângulo equilátero nos resultará na famosa

Estrela de Davi. O próximo passo foi analisar e provar, através de demonstrações, propriedades existentes na Estrela.

Resultados e Discussão

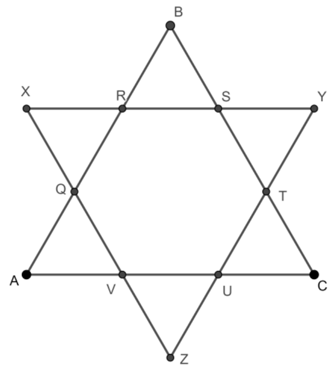
Seja ΔABC um triângulo equilátero de lado l, ao aplicarmos o Teorema de Napoleão, encontraremos um novo triângulo equilátero ΔXYZ como mostrado na figura 2:

Figura 2: Teorema de Napoleão



Fonte: O autor

Figura 3: Estrela de Davi



Fonte: O autor

Observemos que os triângulos ΔABC e ΔXYZ estão em posições opostas (Figura 3). Vamos provar que os dois triângulos são congruentes.

Temos que, utilizando propriedades dos triângulos equilátero e da mediana de um triângulo, temos (figura 2):

$$|\overline{AX}| = \frac{\sqrt{3}}{3}|\overline{AM}|,$$

$$|\overline{AZ}| = \frac{\sqrt{3}}{3}|\overline{AC}|.$$

Dessa forma, temos que:

$$\frac{|\overline{AX}|}{|\overline{AM}|} = \frac{|\overline{AZ}|}{|\overline{AC}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e ainda, como $\widehat{ZAX} \equiv \widehat{MAC} = 120°$, obtemos que os ΔMAC e ΔZAX são semelhantes, e portanto:

$$\frac{|\overline{AX}|}{|\overline{AM}|} = \frac{|\overline{AZ}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{ZX}|}{|\overline{MC}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Agora,

$$\frac{|\overline{ZX}|}{|\overline{MC}|} = \frac{|\overline{AZ}|}{|\overline{AC}|} \leftrightarrow |\overline{ZX}||\overline{AC}| = |\overline{AZ}||\overline{MC}|,$$

mas, $|\overline{AZ}| = \frac{\sqrt{3}}{3}|\overline{AC}|$, então,

$$|\overline{ZX}||\overline{AC}| = \frac{\sqrt{3}}{3}|\overline{AC}||\overline{MC}| \leftrightarrow |\overline{ZX}||\overline{AC}| - \frac{\sqrt{3}}{3}|\overline{AC}||\overline{MC}| = 0$$

$$\leftrightarrow |\overline{AC}|\left(|\overline{ZX}| - \frac{\sqrt{3}}{3}|\overline{MC}|\right) = 0 \leftrightarrow |\overline{ZX}| = \frac{\sqrt{3}}{3}|\overline{MC}| \leftrightarrow |\overline{MC}| = \frac{3\sqrt{3}}{3}|\overline{ZX}| \qquad (*)$$

Sendo W ponto médio de $|\overline{AB}|$, então $|\overline{CW}|$ e $|\overline{MW}|$ são a altura relativa dos triângulos ΔABC e ΔABM respectivamente, e como o ΔABC é equilátero, temos que:

$$|\overline{AW}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|.$$

Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{CW}|^2 + |\overline{AW}|^2 \leftrightarrow |\overline{AC}|^2 = |\overline{CW}|^2 + \frac{1}{4}|\overline{AC}|^2 \leftrightarrow |\overline{AC}|^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = |\overline{CW}|^2 \leftrightarrow \frac{3}{4}|\overline{AC}|^2 = |\overline{CW}|^2$$
$$\leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{AC}| = |\overline{CW}|\ (I)$$

e ainda, sendo W também ponto médio de $\overline{MC}$, temos de $(*)$ que:

$$|\overline{CW}| = \frac{1}{2}|\overline{MC}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{3}|\overline{ZX}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{ZX}|\ (II)$$

Assim, de (I) e (II), temos

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{ZX}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{AC}| \leftrightarrow |\overline{ZX}| = |\overline{AC}|$$

$$\therefore \Delta XYZ \equiv \Delta ABC$$

Os triângulos menores na estrela são equiláteros?

Seja W o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, assim, $\overline{CW}$ será a altura relativa do triângulo ΔABC, e sabendo que $\overline{XW}$ é colinear a $\overline{XC}$, pois temos que X é o ortocentro do triangulo equilátero gerado pelo lado $\overline{AB}$, como $\widehat{CWB} = 90°$, consequentemente $\widehat{XWR} = 90°$. Dessa mesma forma, a bissetriz do ΔXYZ relativa ao ângulo $\widehat{ZXY}$ também será colinear ao segmento $\overline{XW}$, assim teremos que o ângulo $\widehat{WXR} = 30°$, assim sendo o ângulo $\widehat{XRW} = 60°$, logo $\widehat{QXR} = \widehat{XRQ} = \widehat{RQX} = 60°$. Portanto, o triângulo menor ΔQXR é equilátero. Analogamente, teremos que os 6 triângulos menores serão equiláteros.

Como vimos, os ângulos $\widehat{WXR} = \widehat{CXS} = 30°$ e ainda, da mesma forma, obteremos que o ângulo $\widehat{WCT} = \widehat{XCS} = 30°$, então $\widehat{CXS} + \widehat{XCS} + \widehat{CSX} = 180° \leftrightarrow \widehat{CSX} = 120°$. Portanto, semelhantemente teremos que todos os ângulos internos do hexágono central serão de 120°, ou seja, o hexágono central da estrela será um hexágono regular. Dessa forma, temos que os triângulos equiláteros menores possuíram o mesmo tamanho.

Área e perímetro da estrela:

Seja um triângulo ΔABC equilátero de lado l, logo como vimos, ao aplicarmos o teorema, nos resultará na Estrela de Davi, que se decompõe em 6 triângulos menores equiláteros e 1 hexágono regula central.

Seja o lado AB do triângulo (figura 3), logo o lado é dividido em 3 triângulos menores, como os triângulo possuem o mesmo tamanho, então o lado de cada triângulo menor será $\frac{l}{3}$. Então, o perímetro da estrela será:

$$P_* = 12.\frac{l}{3} = 4l$$

Como vimos, a estrela é formada por 2 triângulos iguais com posições opostas, então a área da estrela é formada pela a área dos dois triângulos maiores menos a área hexágono central. Logo, como o lado do hexágono mede $\frac{l}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}l}{2}$ a altura dos triângulos maiores. Então:

$$A_* = 2\frac{\frac{\sqrt{3}l^2}{2}}{2} - \frac{3\left(\frac{l}{3}\right)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{3}$$

Conclusões

A geometria possui resultados fascinantes que prendem a atenção dos que a estuda. Neste trabalho, relacionamos o Teorema de Napoleão com conceitos de semelhança e congruência de triângulos e, além disso, foi possível associar o resultado com a estrela de Davi, tornando assim um trabalho interdisciplinar. O teorema pode ser aplicado agora nos triângulos menores sucessivamente e assim obter um fractal, que é objeto de nossos estudos atualmente.

Referências bibliográficas

ALVES, D. S. *Os Teoremas Esquecidos pelos Professores de Geometria Plana do Ensino Médio.* Dissertação (UFMS) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

GONZAGA. G. C. S. *Teorema de Napoleão: Origem, Demonstração e Aplicações.* Dissertação (UFG) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.

MACEDO, D. M. R. *Resgatando alguns Teoremas Clássicos da Geometria Plana.* Dissertação (UFC)- Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L. História da matemática em atividades didáticas: Utilizando a história no Ensino de Geometria. Natal: EDUFRN, 2005.